Suites de fonctions

I Convergence simple et uniforme

Données : (X, d) est un em | $(f_n) \in \mathcal{C}(X,E)^{\mathbb{N}}$
$(E, \| \, \|)$ est un e.v.n

A) Convergence simple :

Déf : f_n CVS $\iff \forall x \in X$ $f_n(x)$ CV (vers $f(x)$, f est la limite simple de (f_n))

"suite à paramètre"

Exo : $(n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R}$ $f_n(x) = \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}}$

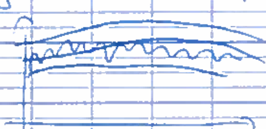
B) Convergence uniforme

Déf : (f_n) CVU vers $f \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon\ \forall x \in X$
$\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon$
$\sup \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

$\iff f_n - f$ est bornée apcr et $\|f_n - f\|_\infty \to 0$

Interprétation "tube autour de la fct"



Pratique : On examine la CVS de f_n, puis examine $\sup_{x \in X} \|f_n(x) - f(x)\| = \mu_n$

Négation : $f_n \overset{CVU}{\not\to} f \iff \mu_n \not\to 0 \iff \exists \delta > 0\ \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}}$
$\|f_n(x_n) - f(x_n)\| \geq \delta$
pour une infinité de n

- **Exo :** (Sommets) $f_n \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ si f_n CVU vers f mq f est bornée et $\sup_{[0,1]} f_n \longrightarrow \sup_{[0,1]} f$

3) Opérations simples

① Réunions ensemblistes finies

Si (f_n) CVU vers f sur A_k, $k=1,\dots,p$, alors $f_n \xrightarrow[CVU]{} f$

($\triangle$ $p \not\to +\infty$) D/ Prendre $n_\varepsilon = \max(n_{\varepsilon_1},\dots,n_{\varepsilon_p})$

② Combinaisons linéaires

③ Produit par une fonction bornée

si g est bornée, $\sup_{x\in X} \|f_n(x)g(x)-f(x)g(x)\| \leq \|g\|_\infty \sup_{x\in X}\|f_n(x)-f(x)\|$

sur $[0,+\infty[$

Si le membre de droite tend vers 0, le — de gauche est fini apr, tend vers 0

④ Produit dans les fonctions bornées : $f_n \in \mathcal{F}_B(X,E)$

i) Si (f_n) $\xrightarrow{CVU}$ f, f est bornée et (f_n) est unif bornée

ii) Si de plus $(g_n) \in \mathcal{F}_B(X,E) \xrightarrow{CVU} g$, on a $f_n g_n \xrightarrow{CVU} fg$

D/ i) il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\|f-f_N\|_\infty \leq 1$

de là $\forall x\in X$ $\|f(x)\| \leq 1+\|f_N(x)\| \leq 1+\|f_N\|_\infty$

càd $\|f\|_\infty \leq 1+\|f_N\|_\infty$

$\exists N\in\mathbb{N}$ $\forall n \geq N$ $\|f_n-f\|_\infty \leq 1$

$\|f_n\|_\infty \leq 1+\|f\|_\infty$

et donc $\forall n\in\mathbb{N}$ $\|f_n\|_\infty \leq \max(\|f_0\|_\infty,\dots,\|f_{N-1}\|_\infty, 1+\|f\|_\infty)$

ii) Produit en algèbre normée

$M = \sup_{n \geq 0} \|g_n\|_\infty$ $\qquad \|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|f - f_n\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g - g_n\|_\infty$

$$\leq M\|f - f_n\| + \|f_\infty\| \|g - g_n\|_\infty$$

D) Exemples :

① $f_n(x) = n^\alpha \underbrace{x^n(1-x)}_{\tilde{f}_n}$ sur $[0,1]$, $\alpha \geq 0$

S/ On estime $\sup_{x \in [0,1]} (\underbrace{x^n - x^{n+1}}_{\tilde{f}_n})$, $\tilde{f}_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n$

$\tilde{f}_n'(x) = 0 \iff x = \frac{n}{n+1}$ ($x \neq 0$)

		$\frac{n}{n+1}$	
$\tilde{f}_n'$	$+$		$-$
$\tilde{f}_n$	$\nearrow$		$\searrow$

$\tilde{f}_n\left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{en}$

$\mu_n = \sup_{[0,1]} f_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{e}$ CVU si $\alpha < 1$

Pourtant : $f_n \xrightarrow{CVS} 0$

② $f_n(x) = n^\alpha x e^{-nx}$ $\quad f_n \xrightarrow{CVS} 0$ $\quad$ | $x = 0$ OK, $x > 0$ OK

$\sup_{x \geq 0} (\underbrace{x e^{-nx}}_{g_n})$: $\quad g_n'(x) = (1 - nx) e^{-nx}$

		$\frac{1}{n}$	
g_n	$0 \nearrow$		$\searrow 0$

$g_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{ne} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e}$

si $\alpha < 1$ CVU vers 0

$\alpha = 1$ non

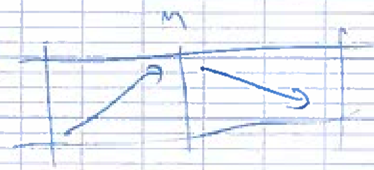
$\alpha > 1$ $\mu_n \to \infty$.

importantes RM : Si l'on se donne $\alpha > 0$, dès que $n > \frac{1}{\alpha}$

$$0 \leq f_n(x) \leq f_n(\alpha) \Big\} = n^a \alpha e^{-n\alpha} \longrightarrow 0$$

③ I $f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}\left(n x^{n-1} - x^n\right) e^{-x} = \frac{x^{n-1}}{n!}(n-x)\, e^{-x}$$



$$f_n(n) = \frac{n^n}{n!} e^{-n} \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{1}{\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$$

$\sup_{x \geq 0} f_n(x) \longrightarrow 0 \Big\}$ donc CVU

II Transferts

A) Convergence simple ~~continuité~~ ~~intégrale~~

Si les f_n sont $\nearrow$ et $f_n \xrightarrow{CVS} f$, f est croissante

Si les f_n sont convexes et $(f_n) \xrightarrow{CVS} f$, f est convexe

PAVÉ + TIPO p137 ← Revoir DINI c.f Math 1 p 180 (Dini + fermés emboîtés)

B) Convergence uniforme

Continuité :

Th Soit (f_n) $X \to E$, $a \in X$. On suppose

i) Les (f_n) sont C^0 en a

ii) Il existe $U \in \mathcal{V}(a)$ tq $f_{n}|_U \xrightarrow{CVU} f|_U$

Alors f est C^0 en a

D/ "3ε" Soit $\varepsilon > 0$: Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall x \in U$

$\| f_n(x) - f(x) \| \leq \varepsilon$

f_{n_ε} est $\mathcal{C}^0$ en a, il existe $\eta > 0$ tq $B(a,\eta) \subset U$ et

$\forall x \in B(a,\eta)$, $\| f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a) \| \leq \varepsilon$

il vient $\forall x \in B(a,\eta)$, $\| f(x) - f(a) \| \leq \overbrace{\| f(x) - f_{n_\varepsilon}(x) \|}^{\leq \varepsilon}$

$+ \overbrace{\| f_{n_\varepsilon}(x) - f_{n_\varepsilon}(a) \|}^{\leq \varepsilon}$

$+ \underbrace{\| f_{n_\varepsilon}(a) - f(a) \|}_{\leq \varepsilon}$

Conséquence : si $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ sur X et si toutes les (f_n) sur $\mathcal{C}^0$, f aussi [et donc : f discontinue $\Rightarrow f$ non lim U de f_n $\mathcal{C}^0$]

Pratique : X intervalle de $\mathbb{R}$: CVU sur tout segment $\subset X$

X ouvert de $\mathbb{R}^n$: CVU ——— compact $\subset X$

B2. interversion de limite :

Th : On suppose que $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur $A \subset X$, $a \in \bar{A}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_n(x) = \ell_n$. Si E est complet, (ℓ_n) converge vers ℓ et $\exists$ lim

$\exists \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell$ ~~et~~

Pratique (99,9%) dimension finie

D/ On écrit la CVU dans f_n. Soit $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$

tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall x \in A$ $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq 2\varepsilon$

On fixe (pour l'instant) $\left| \begin{array}{l} m \geq n_\varepsilon \\ n \geq n_\varepsilon \end{array} \right.$ "on fait" $x \underset{x \in A}{\longrightarrow} a$ $\|\ell_m - \ell_n\| \leq$

(ℓ_n) est de Cauchy et converge donc vers ℓ par complétude de E

FIN On suppose $a \notin A$. On pose $\left| \begin{array}{l} g_n(x) = f_n(x) \text{ si } x \in A \\ g_n(a) = \ell_n \end{array} \right.$ $\begin{array}{l} g(x) = f(x) \\ g(a) = \ell \end{array}$

Chaque g_n est $\mathcal{C}^0$ en a ; de plus $g_n \xrightarrow[A \cup \{a\}]{CVU} f$ $\Big|$ Ainsi g est $\mathcal{C}^0$ en a

Notation : Avec les bonnes hyp $\lim\limits_{n \to \infty} \underbrace{\lim\limits_{x \to a} f_n(x)}_{\ell_n}$

$= \lim\limits_{x \to a} \underbrace{\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)}_{f(x)} = f(a)$

Extension en $+\infty$: $\left| \begin{array}{l} f_n\ [a, +\infty[\ \to E \\ f_n \longrightarrow \ell_n \text{ en } +\infty \\ f_n \xrightarrow{CVU} f \text{ sur } [a, +\infty[\end{array} \right|$ Alors $(\ell_n) \to \ell$ et $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

B3 Intégration

Rappel : Si $f_n \in \mathcal{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$ et $(f_n) \xrightarrow{CVU} f$ CPM (IT p)

Alors $\int_a^b f_n \longrightarrow \int_a^b f$ et $\left(\int_a^b |f_n - f|^2\right)^{1/2} \longrightarrow 0$

D/ $\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| \leq \|f_n - f\|_\infty \underbrace{(b-a)}_{\text{longueur}}$

Rq : On peut faire de même sur I borné.

31

Contre-ex : sur $[0,+\infty[$ $f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1, \quad \int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x}\,dx = \left[x^{n+1}(-e^{-x})\right]_0^{+\infty} + (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$$

donc $\int_0^{+\infty} x^{n+1} e^{-x}\,dx = (n+1)\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx$: $\boxed{\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,dx = n!}$ ♡

Bilan $\begin{cases} f_n \xrightarrow{CVU} 0 \text{ sur } [0,+\infty[\\ \int_0^{+\infty} f_n = 1 \end{cases}$

A gift from the Romans? → Convergence dominée Soit $(f_n) \in \mathcal{C}_{pm}(I,\mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

1) $f_n \xrightarrow{CVS} f$ C_{PM} sur I

2) $\exists \varphi \in L^1(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $|f_n| \leq \varphi$ | alors $f_n \in L^1(I)$, $f \in L^1(I)$

et $\int_I f_n \longrightarrow \int_I f$

B4 Dérivation :

⚠ $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}}$ | f_n CVS vers f $x \longmapsto |x|$

$0 \leq f_n(x) - \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2} - x^2} = \frac{1}{n}$

Il y a CVU, mais f n'est pas dérivable en 0 alors que chaque f_n est $\mathcal{C}^\infty$

Il faut contrôler les dérivées $(\|\cdot\|_\infty)$

Th : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $(f_n) \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$

On suppose : i) $\exists a \in I$, $(f_n(a))$ CV

ii) Pour tout segment $S \subset I$, $f_n'|_S$ CVU, mettons vers $g|_S$

Alors (f_n) CVS sur I (vers f), f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f' = g$

et $f_n \xrightarrow{CVU} f$ sur tout segment $\subset I$

D/ Soit $x \in I$: Sur $[a, x]$ $f_n' \xrightarrow{CVU} g$. de là, g est $\mathcal{C}^0$ sur $[a, x]$

et $\int_a^x f_n' \to \int_a^x g$ ie $f_n(x) - f_n(a) \to \int_a^x g$

On pose $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) + \int_a^x g$, c'est bien $\mathcal{C}^1$ car g est $\mathcal{C}^0$

et $f_n \xrightarrow{CVS} f$. Enfin, si $[c, d] \subset I$ il vient $\forall x \in [c, d]$, $f(x) - f_n(x)$

$|f(x) - f_n(x)| = |f(c) - f_n(c) + \int_c^x (g - f_n')| \leq \underbrace{|f(c) - f_n(c)| + \int_c^d \|g - f_n'\|_\infty}_{\to 0}$

donc $\sup_{x \in [c,d]} |f(x) - f_n(x)| \longrightarrow 0$

Généralisation : f_n de classe $\mathcal{C}^p$

$f_n(a), \dots, f_n^{(p)}(a)$ CV

alors f est $\mathcal{C}^p$ et $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$ sur tout segment.

COMPLÉMENTS (AHP)

A) Continuité diagonale

|| Soit (f_n) une suite $\mathcal{C}^0$, converge unif sur X vers f

|| Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ tq $(x_n) \to a$ dans X

Alors $f_n(x_n) \longrightarrow f(a)$

D/ Soit $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq$ $\forall x \in X$ $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$
Soit $\eta > 0$ tq $\forall y \in X$ $d(a, y) < \eta \Rightarrow \|f(a) - f(y)\| \leq \varepsilon$ (f $\mathcal{C}^0$ en a par (CU))
Il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N_2$ $d(a, x_n) \leq \eta$

de là il résulte que $\|f_n(x_n) - f(a)\| \leq \underbrace{\|f_n(x_n) - f(x_n)\|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\|f(x_n) - f(a)\|}_{\leq \varepsilon}$

$= 2\varepsilon$.

Application : Zéros de fonctions, pt fixe
Ex Soit K un convexe compact de l'em $(E, \|\ \|)$
Soit $f : K \to K$ 1 lip
M q f possède un pt fixe dans K.

5/ Soit $a \in K$, $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in K$: $f_n(x) = \frac{1}{n} f(a) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x)$

de là devient strictement contractante (est $1 - \frac{1}{n}$ contractante avec $1 - \frac{1}{n} < 1$)
et K est complet car compact
donc f_n $\exists ! x_n \in K$ $f_n(x_n) = x_n$

Or K est compact : $\exists \varphi_{\mathbb{N}} \nearrow^{\mathbb{N}}$ $x_{\varphi(n)} \to b \in K$
De plus $\forall x \in K$ $\|f_n(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{n} \|f(x) - f(a)\| \leq \frac{1}{n} \|x - a\|$
$\leq \frac{1}{n} \operatorname{diam}(K)$

et f_n CU $\to f$

Convergence diagonale $f_{\varphi(n)}(\underbrace{x_{\varphi(n)}}_{\to b}) \longrightarrow f(b)$

donc $b = f(b)$

- Ex pro : $\|f_{\varphi(n)}(x_{\varphi(n)}) - f(a)\| \leq \dots$

B) Critère de Cauchy uniforme

Th. Soit $f_n : X \to E$

1) Si f_n UCV alors : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \begin{array}{l} \forall n \geq n_\varepsilon \\ \forall m \geq n_\varepsilon \end{array} \Big|\ \forall x \in X\ \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$

2) Réciproquement, si E est complet et si le CCU est vérifié, la suite f_n est UCV

1) = Condition nécessaire 2) condition suffisante

1/ L'hypothèse donne $f : X \to E$ tq : $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_\varepsilon$

$\forall x \in X\ \|f_n(x) - f(x)\| \leq \varepsilon$

De là $\forall m, n \geq n_\varepsilon$

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \|f_m(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f(x)\|$$
$$\leq 2\varepsilon$$

2) Le CCU donne le fait que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))$ est de Cauchy donc CV dans E supposé complet

Soit f la limite simple de la suite (f_n)

Fixons $n \geq n_\varepsilon$ et $x \in X$, il vient

$$\forall m \geq n_\varepsilon \quad \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$$

$$m \to \infty \quad \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$$

donc $\forall n \geq n_\varepsilon\ \forall x \in X\ \|f(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$

RMI : Soit $f_n \in \mathcal{C}_b(X,E)$, f_n est de Cauchy pour $\| \|_\infty$ si f_n vérifie le CCU, si E est complet, elle converge, lien unif $(\mathcal{C}_b(X),E), \| \|_\infty)$ est ~~conti~~ complet.

Pratique : $\mathbb{R}, \mathbb{C}$, evn df

Négation : $\exists m_k, n_k \to +\infty$; $\exists x_k \in X$ tq $\|f_{m_k}(x_k) - f_{n_k}(x_k)\| \not\to 0$

(AHP) Th Soit $A \subset X$ $(f_n) \in \mathcal{C}(X,E)^{\mathbb{N}}$, E complet $(A = D(0,R), E = \mathbb{C})$ si (f_n) CVU sur A, elle CVU sur $\bar{A}$

D/ On écrit le CCU comme critère de convergence ~~uniforme~~ uniforme
Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ $\forall m \geq n_\varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall x \in A$ $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$

On fixe $m, n \geq n_\varepsilon$ cette inégalité : $\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon$ a lieu sur A
or $f_m - f_n$ est $\mathcal{C}^0$ donc $\{\|f_m - f_n\| \leq \varepsilon\}$ est fermé, contient A donc $\bar{A}$

(CC) $\forall x \in \bar{A}$ $\|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon$; on a le CCU sur $\bar{A}$ (CS de convergence)

Ex pro : retrouver l'interversion des limites avec le CCU

C) Passage de la CVS à la CVU

C-1 Dini (Rappel) : Soit $f_n \in \mathcal{C}(X, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, avec X compact.
Si $f_n \nearrow f$ continue, la convergence est uniforme.

C-2 th Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes $[a,b] \to \mathbb{R}$ CVS vers f $\mathcal{C}^0$ $[a,b] \to \mathbb{R}$. Alors la CV est uniforme

D/ Soit $\varepsilon > 0$ f est $\mathcal{C}^0$ donc UC $\exists \eta > 0$ $\forall (s,t) \in [a,b]^2$

$$|s-t| \leq \eta \Rightarrow |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

Soit $x_0 = a < x_1 < \dots < x_p = b$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $< \eta$
f_n CVU vers f sur $\{x_0, \dots, x_p\}$ FINI (B. TOPO, IX)

il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$ $\forall k \in [\![0,p]\!]$, $|f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon$

$$f(x_k) - \varepsilon \leq f_n(x_k) \leq f(x_k) + \varepsilon \quad (*)$$

Soit $x \in [x_k, x_{k+1}]$ $|x_k - x_{k+1}| \leq \eta$ donc $|f(x) - f(x_k)| \leq \varepsilon$, $|f(x_{k+1}) - f(x)|$

Soit $n \geq n_\varepsilon$ $f_n(x_k) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{k+1})$ car $f_n \nearrow$

$$f(x) - 2\varepsilon \leq f(x_k) - \varepsilon \leq f_n(x_k) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{k+1}) \leq f(x_{k+1}) + \varepsilon \leq f(x) + 2\varepsilon$$

Application : (ETV) Soit $g_n \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, convexes, $g_n \xrightarrow{CVS} g$

et g'_n CVS. Alors g est $\mathcal{C}^1$ et $g' = \lim g'_n$

$\to g$ $\mathcal{C}^0$ (f = lim simple de g'_n)

D/ Les fonctions $f_n = g'_n$ sont $\nearrow$ par convexité des g_n.
Soit S un segment de $\mathbb{R}$, $f_n|_S \xrightarrow{CVU} f|_S$

Alors (Dini) $g_n|_S \xrightarrow{CVU} g|_S$ et g est $\mathcal{C}^1$ de dérivée f

C-3 Suites équilip :

Th Soit $f_n \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$. On suppose

1) $\exists K \in \mathbb{R}^+$ $\forall n \in \mathbb{N}$, f_n est K lip
2) $f_n \xrightarrow{CVS} f$ | Alors la convergence est uniforme.

D/ Par CVS et avec 1), f est K-lip

Soit $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K+1}$, soit $x_0 = a \leq x_1 \leq \dots \leq x_p = b$ une subdivision

de pas $\leq \delta$, sur $\{x_0, \dots, x_p\}$ fini la suite f_n CVU

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq n_\varepsilon$, $\forall k \in \{0, \dots, p\}$ $|f(x_k) - f_n(x_k)| \leq \varepsilon$

Soit $x \in [a,b]$, $n \geq n_\varepsilon$: ~~$|f(x)-f_n(x)|$ il existe k $x_k <$~~

il existe k $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, $|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + \underbrace{|f(x_k) - f_n(x_k)| + |f_n(x_k) - f_n(x)|}$

$$\leq K \underbrace{|x - x_k|}_{\leq \delta} + \varepsilon + K \underbrace{|x_k - x|}_{\leq \delta}$$

$$\leq 2K\delta + \varepsilon \leq 3\varepsilon$$